第４講　電磁気学Ⅱ

1

次の文章を読んで，［　　］に適した式か値を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，［［　　］］は，すでに［　　］で与えられたものと同じ式を表す。また，問１，問２では指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。ここで，円周率は π，真空中の誘電率は ε_0 とする。

(1)　電気容量の機能および抵抗の機能を備えているコンデンサーについて考える。

図１に，ある物質を２枚の平らな金属板の電極ではさんだコンデンサーと，直流電源からなる回路を示す。この物質は，底面積 S で高さ h の円筒形をしていて，内部は均一である。まず，両端の端子に直流電源を用いて直流電圧 V_0 を加えると，一定に落ち着いた状態において直流電流 I_0 が流れた。ここで，電界としては電極に垂直なもののみが存在していると仮定してよい。このとき，抵抗は［　イ　］と表される。また，この物質の抵抗率は［　ロ　］と求められる。

次に，図２に示すように，交流電源を用いて，同じコンデンサーに角周波数 ω が ω_0 である交流電圧 $V_0 \sin \omega_0 t$ を加え，一定に落ち着いた状態となった。もしこれが，コンデンサーではなく抵抗値が［［　イ　］］の純粋な抵抗ならば，交流電流として［　ハ　］が流れる。しかし，実際には図３に示すような電流が流れたので，このコンデンサーは抵抗の機能と電気容量の機能をともに備えていることが確認できた。以下では，このコンデンサーを図４の等価回路で考える。電気容量の機能のみのコンデンサーの場合，流れる電流は電圧より位相が［　ニ　］だけ進む。しかし，ここでは図３の位相関係にあるので，図４に示された電気容量は［　ホ　］であり，電極ではさまれた物質の比誘電率は，［　ヘ　］と求められる。また，交流電流の振幅値は，I_0 を用いて［　ト　］である。

問１　(1)とは異なる抵抗率の物質を用いて，角周波数が $2\omega_0$ のときに，交流電圧に対する交流電流の位相のずれが(1)と同じく $\dfrac{\pi}{4}$ となるコンデンサーを設計する。(1)の場合と比誘電率および形状が全く同じ物質を用いる場合，物質の抵抗率は(1)の場合と比較して何倍にすればよいかを説明せよ。導出過程も合わせて示せ。

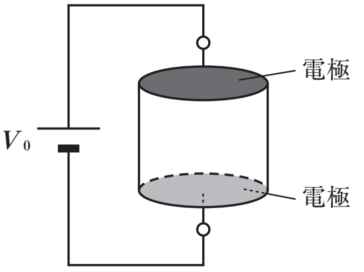


図１

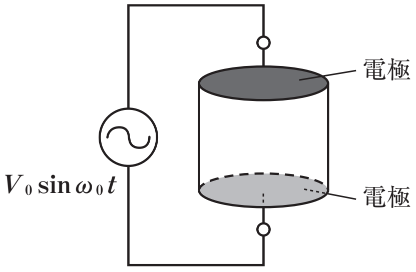


図２

＜ Note ＞

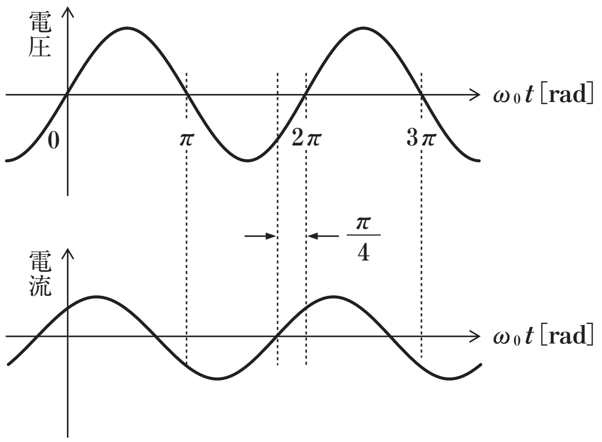


図３

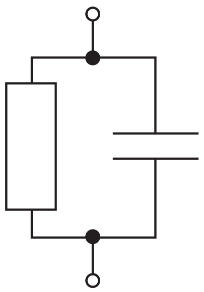


図４

⑵　図１と図２に示したコンデンサーの特性が，⑴の検討から，図４のように表せることがわかったので，ここでは直流電圧を加えた直後のこのコンデンサーの動作について考察しよう。図５に示すような，ある一定の内部抵抗 r をもち電源電圧が V_0 である直流電源を用いた場合，このコンデンサーに加わる電圧や流れる電流は，スイッチを閉じた直後は変化し，しばらくして一定に落ち着いた。この現象は，以下のように理解できる。

一般に，電気容量 C のコンデンサーに電荷 Q が蓄積されているとき，コンデンサーの両端に現れる電圧は［チ］である。図５の場合には，スイッチを閉じた直後には電気容量の部分に電荷は存在しないので，コンデンサーの両端の電圧は［リ］となり，電流は［ヌ］となった。一方，十分に時間が経過した後，電圧が一定となる状態においては，電気容量の部分には電荷が一定に蓄積されていて電荷の出入りはなく，電流は［ル］となった。このような電流の時間変化の様子は，図６のようになった。

問２　電流が図６に示すように流れたことをふまえて，コンデンサーの両端の端子間に現れる電圧の変化を，縦軸を電圧，横軸を時間とするグラフで示せ。ここで，スイッチを閉じた瞬間の電圧値と，電圧の値が一定に落ち着いた後の電圧値をグラフ内に明記すること。導出過程も合わせて示せ。

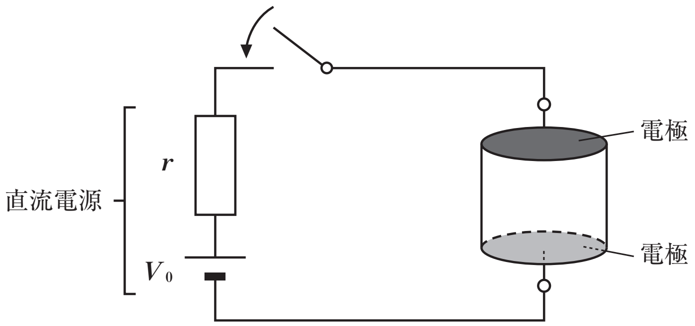


図５

＜ Note ＞

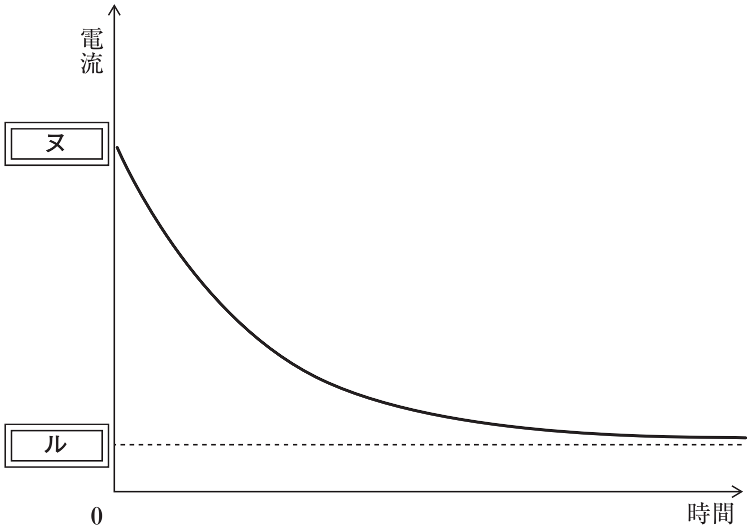


図６

< Note >

2

次の文を読んで，文中の［　　　］に適した式を，それぞれの解答欄に記入せよ。また，問１では指示にしたがって所定の解答欄に記入せよ。

磁石を傾斜したアルミニウム板の上で滑らせると，力学的摩擦が無視できる場合でも，磁石の滑り落ちる速さは短時間のうちにほぼ一定値に達する。これは，磁石の運動にともなってアルミニウム板の内部にうず電流が生じ，このうず電流から磁石が力を受けるために起こる現象である。以下の装置は，この現象をモデル化したものである。

図１のように，水平面に対し角度 θ で傾斜させた滑り台状のプラスチックの板の上から，質量 m の磁石を滑らせる。磁石の大きさは幅 a，長さ b で，厚みは薄いものとする。また磁石の真下には磁石の底面に垂直下向きの強い一様な磁束密度 B が生じており，その他の位置への磁束密度はここでは考慮しないことにする。板には磁石がなめらかに滑るような幅 a の溝があり，溝の底面には幅 a，長さ b，電気抵抗 R の長方形の閉じた電線(一巻きのコイル) L_1，L_2，…，L_n，L_{n+1}，…が，お互い電気的に絶縁されてすき間なく多数埋め込まれている。電線の太さは無視できるものとし，またコイル間の相互インダクタンスは無視でき，コイルの自己インダクタンスも十分に小さく，誘導起電力に応じて電流は十分速く変化するものとする。重力加速度を g とし，磁石と板との間の摩擦力および空気抵抗は無視できるものとする。

この状況では，滑り出して一定時間の後には，磁石の運動は，近似的に等速度運動になる。このときの速度を終端速度という。

(1)　まず，磁石が速さ V の終端速度で運動する場合を考える。

上から n 番目のコイル L_n の上端に磁石が達した時刻を $t=0$ とし，それを基準に測った時刻を t とする。このとき，コイル L_n を貫く磁束は，$0<t<b/V$ のとき $BaVt$，$b/V<t<2b/V$ のとき［　イ　］，その他の時刻では0となる。コイル L_n に誘導される電流は，上から見て時計回りを正方向にとると，$0<t<b/V$ のとき［　ロ　］となり，$b/V<t<2b/V$ のとき［　ハ　］となる。したがって，磁石がコイル L_n におよぼす力は，傾斜した板の表面に沿って下向きを正にとると，$0<t<b/V$ のとき［　ニ　］であり，$b/V<t<2b/V$ のとき［　ホ　］である。

このことから，すべてのコイルから磁石が受ける力 F は，斜面に平行に下向きを正にとると，$F=-CV$ と表すことができ，$C=$［　ヘ　］となる。磁石に働く重力も考慮すると，速さは $V=$［　ト　］と求められる。（［ヘ］と［ト］は F，C，V を用いずに表せ。）

＜ Note ＞

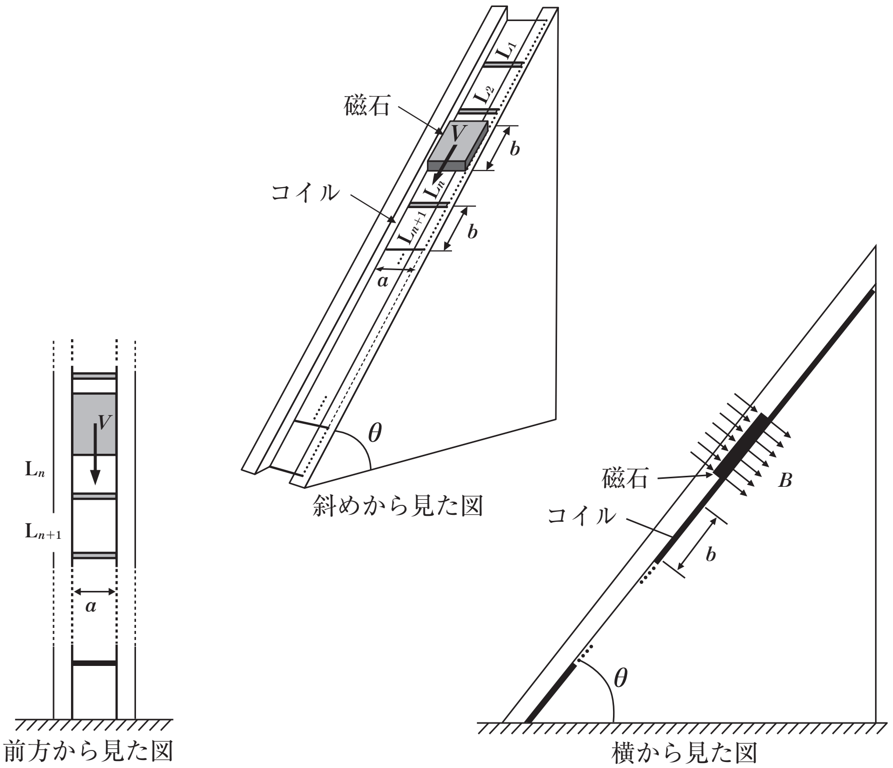


図１

(2)　次に，磁石を静止状態から $t=0$ で静かに離した後，速度が終端速度(大きさ V)に近づく様子を考える。((1)の場合とは時刻の原点が異なることに注意せよ。)

時刻 t における磁石の速さを $v(t)$ とすると，(1)の場合と同様に，コイルから磁石が受ける力 F は，$C=$ **ヘ** を用いて，$F=-Cv(t)$ と表すことができる。(F および $v(t)$ は，斜面に平行に下向きを正にとるものとする。)

したがって，微小時間 Δt を用いて，t から $t+\Delta t$ までの平均加速度を $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ で表すと，磁石に関する運動方程式は $m\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=$ **チ** と書ける。(**チ** は C を含む式で表せ。) ここで V と $v(t)$ との差に注目し $w(t)=V-v(t)$ とおくと，この運動方程式より，$\dfrac{\Delta w}{\Delta t}$ は w に比例し，$\dfrac{\Delta w}{\Delta t}=$ **リ** w と書き表せる。(**リ** は m と C を用いて表せ。)

この方程式と同様の式で表される現象のひとつに原子核の崩壊がある。原子核の崩壊においては，時刻 t における原子核の個数を $N(t)$ とすると，十分に短い時間 Δt の間の変化率 $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}$ は $N(t)$ に比例し，正の係数 β を用いて $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=-\beta N$ と表せる。このような $N(t)$ は，$N(t)=N(0)e^{-\beta t}$ と書けることが知られている。($e≒2.72$ は自然対数の底である。)

＜ Note ＞

したがって，$\dfrac{\Delta w}{\Delta t}=$ リ w から，$v(t)=$ ヌ と求められる。（ ヌ は C を含む式で表せ。）次に，磁石がどのように終端速度に近づいていくかを考える。まず，$w(t)=V/e$，すなわち，$v(t)=(1-e^{-1})V \fallingdotseq 0.63V$ となる時刻 t_0 を考えると，m と C を用いて，$t_0=$ ル と表される。この t_0 を緩和時間という。t_0 を用いると，$t=2t_0$ では $v(t)\fallingdotseq 0.86V$，$t=3t_0$ では $v(t)\fallingdotseq 0.95V$ となり，磁石の運動が，速さ V の等速度運動に近づいていくことがわかる。

問１　$m=2.0\text{g}$，$\sin\theta=0.80$，$\cos\theta=0.60$，$a=1.0\text{cm}$，$b=1.5\text{cm}$，$R=1.0\times10^{-3}\Omega$，$B=0.50\text{T}$，$g=9.8\text{m/s}^2$ の場合について，(a)終端速度の大きさ V，および，(b)緩和時間 t_0 を計算し，それらの値を，有効数字２けたで単位をつけて，それぞれ所定の解答欄(a)，(b)に記入せよ。

＜ Note ＞

第４講　確認テスト

次の文を読んで，[　　　]に適した式をそれぞれ記せ。

電気容量 C〔F〕のコンデンサー，自己インダクタンス L〔H〕のコイルとスイッチSからなる回路が，図１のように，十分に長い２本の平行な導体のレールに接続されている。２本のレールは，間隔が D〔m〕で，水平面に対して角度 θ〔rad〕だけ傾いていて，その上に質量 M〔kg〕の導体棒が水平に置かれている。レールと導体棒に垂直に磁束密度 B〔Wb/m^2〕の一様磁界がかけられている。導体棒はレール上を水平なまま，摩擦なく動くとし，レールに沿った下向きを正の向きとする。また，導体棒，レール，コイルの電気抵抗は全て無視できるとする。重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。

(1)　スイッチを切り，帯電していないコンデンサーだけを接続し，導体棒を静かに離す。導体棒がレールを滑り落ち，レールに沿った速度が v〔m/s〕になった時，コンデンサーに蓄えられた電気量 Q〔C〕は，$Q=$[ア]で与えられる。この時，導体棒を流れる電流を I〔A〕，レールに沿った加速度を a〔m/s^2〕とすると，導体棒の運動方程式は，$Ma=$[イ]と表される。さらに短い時間 Δt〔s〕の間に導体棒の速度が Δv〔m/s〕，コンデンサーの電気量が ΔQ〔C〕だけ増えたとすると，I と a の関係は，C，B，D を用いて $I=$[ウ]$\times a$ となる。これらの式から，導体棒が滑り落ちている時の電流 I は，$I=$[エ]で与えられることがわかる。

(2)　スイッチを入れ，コンデンサーとコイルを接続する。はじめ，コイルを流れる電流は０で，コンデンサーは帯電していなかったとする。この状態で，静かに導体棒を離す。導体棒が x〔m〕だけ滑り落ちた時，導体棒の速度を v〔m/s〕，コイルに流れている電流を I〔A〕，コンデンサーに蓄えられた電気量 Q〔C〕とする。さらに導体棒は短い時間 Δt〔s〕の間に $\Delta x=v\Delta t$〔m〕だけ移動した。電流の増加量を ΔI〔A〕とすると，$\Delta I=$[オ]$\times\Delta x$ という関係式が得られる。この関係式より，導体棒が x〔m〕だけ滑り落ちた時の電流は $I=$[カ]と与えられることがわかる。したがって，この時の，コンデンサーとコイルに蓄えられるエネルギーを含めた全エネルギー E〔J〕は，はじめの全エネルギーの値を０とすると，$E=$[キ]$\times v^2+$[ク]$\times x^2-Mgx\sin\theta$ と表される。

この導体棒の運動を調べるために，図２の力学的な系を考える。ここで，質量 m〔kg〕と M〔kg〕の物体は台上を摩擦なく動き，質量の無視できるひもで摩擦なく動く滑車Kを通して結ばれている。質量 m の物体につながれているばねの伸びを x〔m〕，その時の物体の速度を v〔m/s〕としたときに，全エネルギーの表式が上の全エネルギー E の表式と一致するには，m は，B，C，D を用いて $m=$[ケ]，ばね定数 k〔N/m〕は B，D，L を用いて $k=$[コ]となっていなければならない。この考察により，図１の系の導体棒が単振動をし，その周期は L，C，M，B，D を用いて[サ]〔s〕と表されることがわかる。

＜ Note ＞

また，この周期が図３の共振回路の共振の周期と同じであるとすると，図３の中の右側のコンデンサーの電気容量 C'〔F〕は $C' =$ [シ] と表される。この意味で，導体棒はコンデンサーと同等の役割をしていることがわかる。

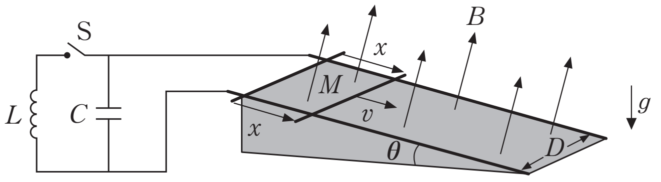


図１

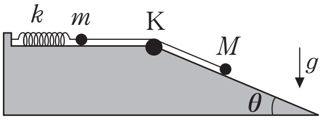


図２

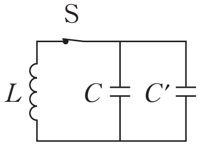


図３

< Note >

第４講　解答

1

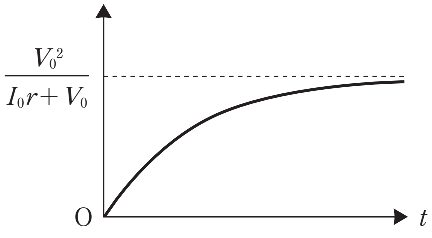
イ　$\dfrac{V_0}{I_0}$　ロ　$\dfrac{SV_0}{hI_0}$　ハ　$I_0\sin\omega_0 t$　ニ　$\dfrac{\pi}{2}$　ホ　$\dfrac{I_0}{\omega_0 V_0}$

ヘ　$\dfrac{hI_0}{\varepsilon_0 S\omega_0 V_0}$　ト　$\sqrt{2}\,I_0$　チ　$\dfrac{Q}{C}$　リ　0　ヌ　$\dfrac{V_0}{r}$

ル　$\dfrac{V_0}{I_0 r+V_0}\cdot I_0$

問１　$\dfrac{1}{2}$倍

問２



2

イ　$Ba(2b-Vt)$　ロ　$-\dfrac{BaV}{R}$　ハ　$\dfrac{BaV}{R}$　ニ　$\dfrac{B^2a^2V}{R}$　ホ　$\dfrac{B^2a^2V}{R}$

ヘ　$\dfrac{2B^2a^2}{R}$　ト　$\dfrac{mgR\sin\theta}{2B^2a^2}$　チ　$C\{V-v(t)\}$　又は　$mg\sin\theta-Cv(t)$

リ　$-\dfrac{C}{m}$　ヌ　$V\left(1-e^{-\frac{C}{m}t}\right)$　ル　$\dfrac{m}{C}$

問１　(a)　3.1×10^{-1}m/s

(b)　4.0×10^{-2}s

第４講　確認テスト

【解答】

ア　$C\cdot BDv$　　イ　$Mg\sin\theta-IBD$　　ウ　CBD　　エ　$\dfrac{CBDMg\sin\theta}{M+CB^2D^2}$

オ　$\dfrac{BD}{L}$　　カ　$\dfrac{BD}{L}x$　　キ　$\dfrac{1}{2}(M+CB^2D^2)$　　ク　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{B^2D^2}{L}$

ケ　CB^2D^2　　コ　$\dfrac{B^2D^2}{L}$　　サ　$2\pi\sqrt{L\left(C+\dfrac{M}{B^2D^2}\right)}$　　シ　$\dfrac{M}{B^2D^2}$

【解説】

(1)

ア　$Q=C\cdot BDv$　…①

イ　$Ma=Mg\sin\theta-IBD$　…②

ウ　①より, $\Delta Q=CBD\cdot\Delta v$　よって, $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}=CBD\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$　　∴　$I=CBD\times a$　…③

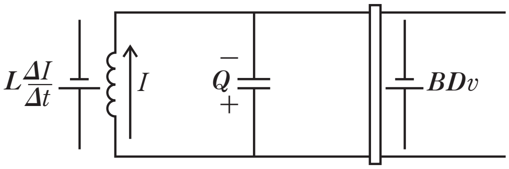
エ　③を②へ

$$Ma=Mg\sin\theta-CB^2D^2a \qquad \therefore\quad a=\frac{Mg\sin\theta}{M+CB^2D^2}$$

これを③へ

$$I=\frac{CBDMg\sin\theta}{M+CB^2D^2}$$

(2)



オ　$L\dfrac{\Delta I}{\Delta t}=BDv$

$$=BD\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\therefore\quad \Delta I=\frac{BD}{L}\cdot\Delta x$$

カ　$I=\dfrac{BD}{L}x$　…④

キ, ク

$$E=\frac{1}{2}Mv^2+Mg(-x\sin\theta)+\frac{1}{2}C(BDv)^2+\frac{1}{2}LI^2$$

$$=\frac{1}{2}(M+CB^2D^2)\cdot v^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{B^2D^2}{L}\cdot x^2-Mgx\sin\theta \quad \cdots⑤$$

ケ, コ

$$E_{カ}=\frac{1}{2}(M+m)v^2+\frac{1}{2}kx^2-Mgx\sin\theta \quad \cdots⑥$$

⑤⑥を見比べて

$$m = CB^2D^2 \qquad k = \frac{B^2D^2}{L}$$

サ　$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}} = 2\pi\sqrt{L\left(C + \dfrac{M}{B^2D^2}\right)}$

シ　$C' = \dfrac{M}{B^2D^2}$